PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR (SVD)

TUGAS AKHIR

Diajukan sebagai Salah Satu Syarat
untuk Memperoleh Gelar Sarjana Sains
pada Jurusan Matematika

Oleh :

SABRINA INDAH MARNI
10854003894

FAKULTAS SAINS DAN TEKNOLOGI
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI SULTAN SYARIF KASIM
RIAU
2013

PENYELESAIAN SISTEM PERSAMAAN LINEAR *FUZZY* MENGGUNAKAN METODE DEKOMPOSISI NILAI SINGULAR (SVD)

SABRINA INDAH MARNI
10854003894

Tanggal Sidang : 25 April 2013
Tanggal Wisuda : April 2013

Jurusan Matematika
Fakultas Sains dan Teknologi
Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau
Jl. HR. Soebrantas No.155 Pekanbaru

ABSTRAK

Tugas akhir ini membahas tentang sistem persamaan linear *fuzzy* dengan nilai keanggotaan segitiga. Sistem persamaan linear *fuzzy* dapat dibentuk dalam persamaan matriks $S\tilde{X} = \tilde{Y}$. Sistem persamaan linear *fuzzy* dapat diselesaikan menggunakan metode *Singular Value Decomposition* (SVD). Metode SVD merupakan suatu metode yang mendekomposisikan suatu matriks A menjadi tiga komponen matriks USV^T. Berdasarkan hasil ini diperoleh bahwa solusi dari sistem persamaan linear *fuzzy* menggunakan metode SVD adalah solusi pendekatan terbaik karena $proy\,\langle B, U\ \ M\ \rangle \neq B$.

Katakunci: basis ortonorma l*f uzzy*, *Singular Value Decomposition* (SVD).

KATA PENGANTAR

Alhamdulillahirabbil'alamin, puji syukur penulis ucapkan kehadirat Allah SWT. atas segala limpahan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul **"Penyelesaian Sistem Persamaan Linear *Fuzzy* Menggunakan Metode Dekomposisi Nilai Singular (SVD)"**. Penulisan tugas akhir ini dimaksudkan untuk memenuhi salah satu syarat dalam rangka menyelesaikan studi Strata 1 (S1) di UIN Suska Riau. Shalawat beserta salam selalu tercurahkan kepada Nabi Muhammad SAW, mudah-mudahan kita semua selalu mendapat syafa'at dan dalam lindungan Allah SWT amin.

Dalam penyusunan dan penyelesaian tugas akhir ini, penulis tidak terlepas dari bantuan berbagai pihak, baik langsung maupun tidak langsung. Untuk itu penulis mengucapkan terimakasih yang tak terhingga kepada kedua orang tua tercinta ayahanda dan ibunda yang tidak pernah lelah dalam mencurahkan kasih sayang, perhatian, do'a, dan dukungan untuk menyelesaikan tugas akhir ini. Selanjutnya ucapan terimakasih kepada :

1. Bapak Prof. Dr. H. M. Nazir selaku Rektor Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
2. Ibu Dra. Hj. Yenita Morena, M.Si selaku Dekan Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
3. Ibu Sri Basriati, M.Sc selaku Ketua Jurusan Matematika Fakultas Sains dan Teknologi Universitas Islam Negeri Sultan Syarif Kasim Riau.
4. Ibu Yuslenita Muda, M.Sc selaku pembimbing yang telah memberikan arahan, motivasi dan membimbing penulis dengan penuh keikhlasan dan kesabaran sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
5. Bapak Mohammad soleh, M.Sc selaku penguji I yang telah banyak membantu, memberikan kritikan dan saran serta dukungan dalam penulisan tugas akhir ini.
6. Ibu Fitri Aryani, M.Sc selaku penguji II yang telah banyak membantu, mendukung dan memberikan saran dalam penulisan tugas akhir ini.

7. Semua dosen-dosen Jurusan Matematika yang telah memberikan dukungan serta saran dalam menyelesaikan tugas akhir ini.

Dalam penyusunan tugas akhir ini penulis telah berusaha semaksimal mungkin. Walaupun demikian tidak tertutup kemungkinan adanya kesalahan dan kekurangan baik dalam penulisan maupun dalam penyajian materi. Untuk itu penulis mengharapkan kritik dan saran dari berbagai pihak demi kesempurnaan tugas akhir ini.

Pekanbaru, 25 April 2013

Sabrina Indah Marni

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Sistem persamaan linier merupakan suatu materi dalam aljabar linier yang merupakan bahasan penting dalam matematika. Sistem persamaan linier dapat dibentuk sebagai persamaan matriks $AX = B$ (Lipschutz, S, 2006). Pada umumnya entri-entri atau konstanta pada sistem paersamaan linier adalah bilangan real. Beberapa tahun ini telah banyak ditemukan kasus salah satu atau seluruh entri-entri dari sistem persamaan linier adalah *fuzzy*. *Fuzzy* dapat diartikan "kabur". Sistem persamaan linier ini dinamakan sistem persamaan linier *fuzzy*, yang mana didalam sistem persamaan linier *fuzz*y itu terdapat minimal dua buah persamaan linier *fuzzy*.

Konsep *fuzzy* pertama kali dikembangkan oleh Lotfi A. Zadeh, seorang ilmuan Amerika Serikat berkebangsaan Iran dari Universitas California di Barkeley, melalui tulisannya pada tahun 1965 (Rinaldi Munir, 2005). Adapun teori *fuzzy* dapat digunakan dalam bidang teori keputusan dan beberapa bagian dalam bidang sains.

Metode yang dapat digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear, diantaranya Eliminasi Gauss, Eliminasi Gauss-Jordan, dan analisis *Singular Value Decomposition* (SVD). Analisis SVD merupakan suatu teknik yang melibatkan pemfaktoran A ke dalam hasilkali USV^T, dengan U, S, V adalah matriks bujur sangkar dan semua entri diluar diagonal dari matriks S adalah nol. Sedangkan vektor kolom dari matriks U dan V adalah ortonormal.

Kelebihan metode analisis SVD dalam menyelesaikan sistem persamaan linear yaitu, solusi dari sistem persamaan linear tetap dapat dicari meskipun sistem persamaan linear tersebut tidak mempunyai pemecahan, dalam hal ini solusi yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik (Ahmad, I, 2010). Metode SVD telah digunakan oleh beberapa peneliti sebelumnya, salah satu diantaranya oleh Irdam Haidir Ahmad dan Lucia Ratnasari (2010) yang juga menggunakan analisis SVD untuk menyelesaikan sistem persamaan linear bilangan riil.

Berdasarkan uraian di atas maka penulis tertarik untuk menggunakan SVD dalam menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*. Sehingga pada proposal tugas akhir ini penulis tertarik untuk melakukan penelitian dengan judul "**Penyelesaian Sistem persamaan Linier *Fuzzy* Menggunakan Metode SVD "**.

1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang yang telah diuraikan, maka dapat dirumuskan masalah dalam penelitian ini yaitu bagaimana penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan SVD

1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah :

1. Matriks yang digunakan adalah matriks bujur sangkar
2. Sistem persamaan linier yang diselesaikan adalah berukuran 2×2 dan 3×3.
3. Sistem persamaan linier *fuzzy* dengan nilai keanggotaannya segitiga.

1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan penelitian ini adalah untuk mendapatkan solusi sistem persamaan linier *fuzzy* dengan menggunakan metode SVD.

1.5 Manfaat apenelitian

Manfaat dari penulisan ini adalah sebagai berikut:

1. Untuk memperdalam ilmu pengetahuan tentang sistem persamaan linear fuzzy.
2. Memberikan informasi kepada pembaca bahwa analisis SVD dapat juga digunakan untuk menyelesaikan sistem persamaan linear *fuzzy*.

1.6 Sistematika Penulisan

Sistematika penulisan tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

Bab I Pendahuluan

Bab ini bersisi latar belakang masalah, perumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penulisan, dan sistematika penulisan.

Bab II Landasan Teori

Bab ini menjelaskan tentang sistem persamaan linear, ortogonal dan basis ortonormal, nilai eigen dan vektor eigen, matriks *fuzzy*, dan analisis *Singular Value Decomposition* (SVD).

Bab III Metodologi Penelitian

Bab ini berisikan langkah-langkah atau prosedur dalam menyelesaikan sistem persamaan linear bilangan *fuzzy* dengan menggunakan analisis *Singular Value Decomposition* (SVD).

Bab IV Pembahasan

Bab ini berisikan penjelasan bagaimana analisis *Singular Value Decomposition* (SVD) dapat digunakan untuk menyelesaikan suatu sistem persamaan linear bilangan *fuzzy*.

Bab V Kesimpulan Dan Saran

Berisi tentang saran dan kesimpulan dari pembahasan

BAB II
LANDASAN TEORI

Pada bab II ini akan membahas tentang teori-teori pendukung yang digunakan untuk pembahasan selanjutnya yaitu tentang sistem persamaan linier, metode *Singular Value Decomposition* (SVD), ortogonal dan ortonormal, nilai eigen dan vektor eigen dan bilangan *fuzzy*.

2.1 Sistem Persamaan Linier

Sistem persamaan linier adalah sekumpulan persamaan linier yang terdiri dari $L_1, L_2, \dots, L_m$ persamaan, dengan n variabel yang tidak diketahui yaitu $x_1, x_2, \dots, x_n$ yang dapat disussun dalam bentuk standar

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \cdots + & a_{1n}x_n = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \cdots + & a_{2n}x_n = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \cdots + & a_{mn}x_n = & b_m \end{matrix} \qquad (2.1)$$

dengan $a_{11}, a_{12,} \dots, a_{mn}$ adalah koefesien dari variabel x,dan b_i adalah konstanta. Huruf a_{mn} adalah koefesien dari variabel yang tidak diketahui dan ekuivalen dengan persaan matriks

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} = \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{matrix} \quad \text{atau} \quad AX = B \qquad (2.2)$$

dengan A adalah matriks koefesien yang berukuran $m \times n$, X adalah vektor kolom dari variabel-variabel tidak diketahui, dan B adalah vektor kolom dari konstanta. Sistem persamaan linier yang mempunyai penyelesaian disebut konsisten dan sistem persamaan linier yang tidak mempunyai penyelesaian disebut tidak konsisten. Sistem persamaan linier dapat mempunyai solusi tunggal, banyak solusi dan tidak ada solusi. Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linier yang terdiri dari tiga persamaan.

Contoh 2.1

Tentukan penyelesaian dari sistem persamaan linier berikut ini!

$$x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 6$$
$$2x_1 - 4x_2 - 3x_3 = 8$$
$$-3x_1 + 6x_2 + 8x_3 = -5$$

Penyelesaian:

Sistem persamaan linier diatas dapat di selesaikan dengan menggunakan eliminasi Gauss. Untuk menyelesaikan sistem persamaan linier diatas, maka terlebih dahulu SPL tersebut kita ubah ke dalam bentuk matriks yang diperbesar.

Sehingga:

$$\begin{matrix} 1 & -3 & -2 & 6 \\ 2 & -4 & -3 & 8 \\ -3 & 6 & 8 & -5 \end{matrix}$$

Dengan menambahkan -2 kali baris pertama ke baris kedua dan menambahkan 3 kali baris pertama ke baris ke tiga akan di peroleh

$$\begin{matrix} 1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -3 & 2 & 13 \end{matrix}$$

Dengan mengalikan baris ke dua dengan $\frac{1}{2}$ akan diperoleh

$$\begin{matrix} 1 & -3 & -2 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 2 & 13 \end{matrix}$$

Dengan menambahkan 3 kali baris kedua ke baris pertama dan ketiga akan diperoleh

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & 7 \end{matrix}$$

Dengan mengalikan baris ketiga dengan $\frac{7}{2}$ akan diperoleh

$$\begin{matrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Dengan menambahkan $\frac{1}{2}$ kali baris ketiga ke baris pertama dan menembahkan $-\frac{1}{2}$ kali baris ketiga ke baris kedua akan diperoleh

$$\begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{matrix}$$

Jadi solusi dari sistem persamaan linier di atas adalah $x_1 = 1$, $x_2 = -3$ dan $x_3 = 2$.

2.2 Metode Singular Value Decomposition (SVD)

Singular Value Decomposition (SVD) adalah suatu metode yang mendekomposisikan matriks A menjadi tiga komponen matriks yaitu, USV^T,yang mana salah satu dari matriks tersebut entrinya merupakan nilai singular dari matriks A.

Berikut ini akan diberikan penjelasan tentang matriks U, S, dan V

a. Matriks U adalah matriks bujursangkar dengan entri-entri kolomnya merupakan basis ortonormal. $U\ (M)$ didefinisikan oleh (Kalman, 2002):

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} A v_i$$

Dengan $u_1, u_2, \ldots, u_m$ membentuk basis ortonormal.

b. Matriks S adalah matriks bujur sangkar yang semua entri diluar diagonalnya adalah bernilai 0, dan elemen-elemen diagonalnya adalah nilai singular dari matriks A. Berikut ini akan diberikan definisi dari nilai singular.

Definisi 2.1 (Ahmad, 2010): Diketahui matriks $A \in R^{n\times n}$ dengan $rank\ A = r$, yang mana $r \leq min\ n, n$. Nilai eigen dari matriks A^TA adalah $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r > \lambda_{r+1} = \cdots = \lambda_n = 0$. Akar nilai eigen positif dari A^TA disebut dengan nilai singular σ dari matriks A dan dinyatakan dengan $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, untuk setiap $1 \leq i \leq n$.

Bentuk dari matriks S :

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \sigma_n \end{bmatrix}$$

c. Matriks V adalah matriks bujursangkar yang terbentuk dari vektor-vektor eigen dari $M^T M$ yang dinormalisasikan, yaitu:

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i,$$

Berikut ini akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linier yang tidak konsisten menggunakan metode SVD.

Contoh 2.3

Tentukan penyelesaian sistem persamaan linier berikut menggunakan metode SVD

$$x_1 + x_2 = 4$$
$$2x_1 + 2x_2 = 6$$

Penyelesaian:

Langkah-langkah dalam penyelesaiannya adalah:

1. Mengubah sistem persamaan linear ke dalam bentuk persamaan matriks $MX = B$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

2. Mencari nilai eigen dan vektor eigen:

1) Mengubah matriks A menjadi matriks $M^T M$

$$M^T M = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$$

2) Mencari nilai-nilai eigen

$$\lambda I - M = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -5 \\ -5 & \lambda - 5 \end{bmatrix}$$

$$det\ \lambda I - M = det \begin{bmatrix} \lambda - 5 & -5 \\ -5 & \lambda - 5 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 10\lambda + 25$$

persamaan karakteristik dari A adalah

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

Sehingga, didapat nilai-nilai eigen dari M adalah $\lambda_1 = 10$ dan $\lambda_2 = 10$

3) Mencari vektor-vektor eigen

Untuk $\lambda = 10$

Didapat vektor eigen, $x_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

Untuk $\lambda = 0$

Didapat vektor eigen, $x_2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$

3. Menyusun matriks S

Nilai singular dari matriks A adalah

$$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{10} = 3.1623$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0} = 0$$

Matriks Σ yang terbentuk adalah $\sum \begin{bmatrix} 3.1623 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Maka,

$$S = \begin{bmatrix} 3.1623 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Menyusun matriks V

$$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$$

Maka,

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix} \text{ dan } v_2 = \begin{bmatrix} -0.7071 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$V = \begin{bmatrix} 0.7071 & -0.7071 \\ 0.7071 & 0.7071 \end{bmatrix}$$

5. Menyusun matriks U

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} M v_i$$

Maka,

$$u_1 = \begin{bmatrix} -0.187 \\ -0.982 \end{bmatrix} \text{ dan } u_2 = \begin{bmatrix} 0.981 \\ -0.196 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$U = \begin{bmatrix} 0.4472 & 0 \\ 0.8944 & 0 \end{bmatrix}$$

6. Menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linear

$$proy_{U\ M}\ b = \sum_{k=1}^{2} \langle b, u_k \rangle u_k$$

$$= \langle b, u_1 \rangle u_1 + \langle b, u_2 \rangle u_2$$

$$= \begin{matrix} 3.1918 \\ 6.3996 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 3.1918 \\ 6.3996 \end{matrix}$$

Berdasarkan perhitungan tersebut diperoleh:

$$proy_{U\ A}\ b \neq\ b = \ 4,6$$

Karena $proy_{U\ M}\ b \neq\ b$, berarti $b \neq\ U\ M$. Hal ini menandakan sistem persamaan linier tersebut tidak konsisten, akan tetapi solusi pendekatan terbaiknya dapat dicari, yaitu:

$$X_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B,\ u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \frac{v_i}{\sigma_i}$$

$$= \begin{matrix} 1.5811 \\ 1.5811 \end{matrix} + \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 1.5811 \\ 1.5811 \end{matrix}$$

Jadi solusi pendekatan terbaik dari sistem persamaan linier ini adalah: $x_1 =\ 1.5811$dan $x_2 =\ 1.5811$

2.3 Ortogonal dan Ortonormal

Untuk pembahasan ortogonoal dan ortonormal akan melibatkan vektor dan proyeksi, sebelum membahas ortogonal dan ortonormal terlebih dahulu akan dijelaskan tentang vektor dan proyeksi. Vektor adalah besaran yang mempunyai panjang dan arah. Vektor dapat diidentifikasi sebagai:

$$u = \quad a_1, a_2, \ldots, a_n$$

Proyeksi dari vektor u pada suatu vektor bukan-nol v didefinisikan sebagai berikut:

$$proy\ \ u, v\ \ = \ \frac{u.v}{\|v\|^2} v.$$

Selanjutnya akan dijelaskan tentang ortogonal dan ortonormal.

2.3.1 Ortogonal

Misalkan V adalah ruang hasil kali dalam. Vektor-vektor $u, v \in V$ disebut ortogonal dan u dikatakan ortogonal terhadap v jika $\langle u, v \rangle = 0$.

Berikut akan diberikan definisi tentang ortogonal

Definisi 2.2 (Anton, H, 2000): Vektor $u, v \in R^n$ dikatakan ortogonal jika dan hanya jika $\langle u, v \rangle = 0$.

Contoh 2.4

Diberikan vektor-vektor sebagai berikut:

$u = (-2,3)$ dan $(3,2)$

Akan ditunjukkan apakah vektor u ortogonal terhadap vektor v

Penyelesaian:

$$
\begin{aligned}
\langle u, v \rangle &= u \cdot v \\
&= u_1 v_1 + u_2 v_2 \\
&= (-2)(3) + (3)(2) \\
&= -6 + 6 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Karena $\langle u, v \rangle = 0$, maka vektor u ortogonal terhadap vektor v

2.3.2 Basis Ortonormal

Berikut akan diberikan teorema basis ortonormal.

Teorema 2.1 (Anton, H, 2000): Jika $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis ortonormal untuk ruang hasil kali dalam V, dan u adalah sebarang vektor dalam V, maka

$$u = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n \rangle v_n$$

Bukti: Karena $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah basis, maka vektor u dapat dinyatakan dalam bentuk

$$u = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n$$

selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $k_1 = \langle u, v_1 \rangle$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Untuk setiap vektor v_i dalam S diperoleh

$$
\begin{aligned}
\langle u, v_i \rangle &= \langle k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_n v_n \rangle \\
&= k_1 \langle v_1, v_i \rangle + k_2 \langle v_2, v_i \rangle + \cdots + k_n \langle v_n, v_i \rangle
\end{aligned}
$$

Karena $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ adalah himpunan ortonormal maka diperoleh

$$\langle v_i, v_i \rangle = \|v_i\|^2 = 1 \quad \text{dan} \quad \langle v_i, v_j \rangle = 0, \text{ jika } j \neq i.$$

Maka persamaan di atas dapat disederhanakan menjadi

$$\langle u, v_i \rangle = k_i \blacksquare$$

Contoh 2.5

Akan ditunjukkan bahwa vektor-vektor di bawah ini merupakan basis ortonormal

$$v_1 = (0, 1) \text{ dan } v_2 = (1,0)$$

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
\langle v_1, v_1 \rangle &= \|v_1\|^2 \\
&= \left(\sqrt{0^2 + 1^2}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{1^2}\right)^2 \\
&= (1)^2 \\
&= 1 \\
\langle v_2 v_2 \rangle &= \|v_2\|^2 \\
&= \left(\sqrt{1^2 + 0^2}\right)^2 \\
&= \left(\sqrt{1^2}\right)^2 \\
&= (1)^2 \\
&= 1 \\
\langle v_1, v_2 \rangle &= (0,1) \cdot (1,0) \\
&= (0)(1) + (1)(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

Karena $\|v_1\|^2 = 1$, $\|v_2\|^2 = 1$ dan $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ maka himpunan vektor $\langle v_1, v_2 \rangle$ ortonormal.

2.4 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 2.3 (Sutojo, T, 2010): Jika A adalah matriks $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam R^n dinamakan vektor eigen dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x, yaitu: $Ax = \lambda x$, untuk suatu skalar λ. Skalar λ disebut nilai eigen dari A dan x dikatakan vektor eigen yang bersesuaian dengan λ.

Untuk mencari nilai eigen matriks A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskannya kembali sebagai berikut:

$$Ax = \lambda x$$

atau

$$(A - \lambda I)\, x = 0$$

dan persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian jika

$$|A - \lambda I| = 0$$

Persamaan di atas disebut sebagai persamaan karakteristik A. mencari nilai eigen berarti menghitung determinan tersebut sehingga diperoleh nilai-nilai λ.

Contoh 2.6

Tentukan nilai eigen dan vektor-vektor eigen dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Berikut ini akan ditunjukkan langkah – langkah untuk mendapatkan nilai eigen dan vektor eigen:

1. mencari nilai-nilai eigen

   $$\lambda I - A = \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix}$$

   $$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 1 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$$

   Persamaan karakteristik dari A adalah

   $$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0$$

   Sehingga didapat nilai-nilai eigen dari matriks A adalah:

   $\lambda_1 = 2.2361$ dan $\lambda_2 = -2.2361$.

2. mencari vektor-vektor eigen

   a. untuk $\lambda_1 = 2.2361$

      didapat vektor eigennya adalah $x_1 = [0.8090 \;\; 1]^T$

   b. untuk $\lambda_2 = -2.2361$

      didapat vektor eigennya adalah $x_2 = [-0.3090 \;\; 1]^T$

sehingga vektor – vektor eigen dari matriks A adalah $x_1 = [0.8090 \;\; 1]^T$ dan $x_2 = [-0.3090 \;\; 1]^T$

2.5 Bilangan *Fuzzy*

Fuzzy dapat diartikan kabur atau semu. Himpunan *fuzzy* pertama kali dibahas oleh Lotfi A. Zadeh 1965. Himpunan *fuzzy* merupakan kumpulan dari entri-entri dengan suatu rangkaian tingkat keanggotaan. Himpunan ini dicirikan dengan fungsi keanggotaan yang menegaskan suatu tingkatan (*grade*) keanggotaan yang bernilai 0 dan 1, dari penjelasan tersebut dapat dikatakan bahwa nilai keanggotaan pada *fuzzy* terletak pada interval $[0,1]$.

Definisi 2.4 (Widodo, 2009) Misalkan X adalah suatu himpunan semesta, kemudian himpunan bagian *fuzzy* U dari X adalah himpunan bagian dari X yang keanggotaannya didefinisikan melalui fungsi keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) \in X \rightarrow [0,1]$$

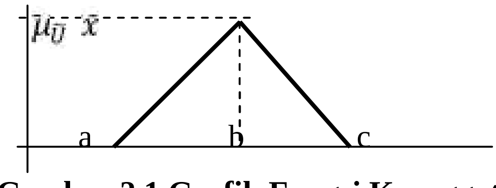
Berdasarkan definisi tersebut maka himpunan $fuzzy\ \tilde{U}$ dalam himpunan semesta x, ditulis dalam bentuk:

$$\tilde{U} = \{(x, \mu_{\tilde{U}}(x)) \mid x \in X\}$$

dengan $(x, \mu_{\tilde{U}}(x))$ menyatakan elemen x yang mempunyai derajat keanggotaan $\mu_{\tilde{U}}(x)$, pada penulisan ini menggunakan fungsi keanggotaan segitiga. Fungsi keanggotaan segitiga ditandai dengan tiga parameter yang akan menentukan koordinat x dari tiga sudut. Persamaan untuk fungsi keanggotaan segitiga ini sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{U}}(x) = \mu_{\tilde{U}}(x, a, b, c) = \begin{cases} (x-a)/(b-a), & a \leq x \leq b \\ (c-x)/(c-b), & b \leq x \leq c \\ 0, & lainnya \end{cases} \tag{2.1}$$

Kurva yang dibentuk oleh fungsi keanggotaan segitiga merupakan gabungan antara dua garis linear, untuk lebih jelas berikut adalah grafik fungsi keanggotaan segitiga:



Gambar 2.1 Grafik Fungsi Keanggotaan Segitiga $\mu_{\tilde{U}}(x, a, b, c)$.

Menurut Beta Norita (2008) menjelaskan tentang definisi bilangan *fuzzy* u di dalam R sebagai pasangan fungsi $\underline{u}, \overline{u}$ yang memenuhi sifat sebagai berikut:

1. Fungsi $\underline{u}$ monoton naik, terbatas dan kontinu kiri pada [0,1]
2. Fungsi $\overline{u}$ monoton turun, terbatas dan kontinu kanan pada 0,1
3. $\underline{u}(r) \leq \overline{u}(r)$ untuk setiap r dalam 0,1 .

Himpunan bilangan-bilangan *fuzzy* dinyatakan dengan *F*, untuk setiap bilangan *fuzzy* u F ditulis dalam bentuk parameter $u = \underline{u}, \overline{u}$. Menurut P. Mansouri dan B.

Asady (2011) operasi aljabar bilangan *fuzzy* untuk setiap $u = \underline{u}\ r\ , \overline{u}\ r$ dan $y = \underline{y}\ r\ , \overline{y}\ r$ F dan bilangan riil k didefinisikan sebagai berikut:

1. $u + y = (\underline{u}\ r\ + \underline{y}\ r\ , \overline{u}\ r\ + \overline{y}\ r\ )$
2. $u = y$ jika dan hanya jika $\underline{u} = \underline{y}$ dan $\overline{u} = \overline{y}$
3. $ku = k\underline{u}, k\overline{u}$ untuk $k \geq 0$
4. $ku = k\overline{u}, k\underline{u}$ untuk $k < 0$

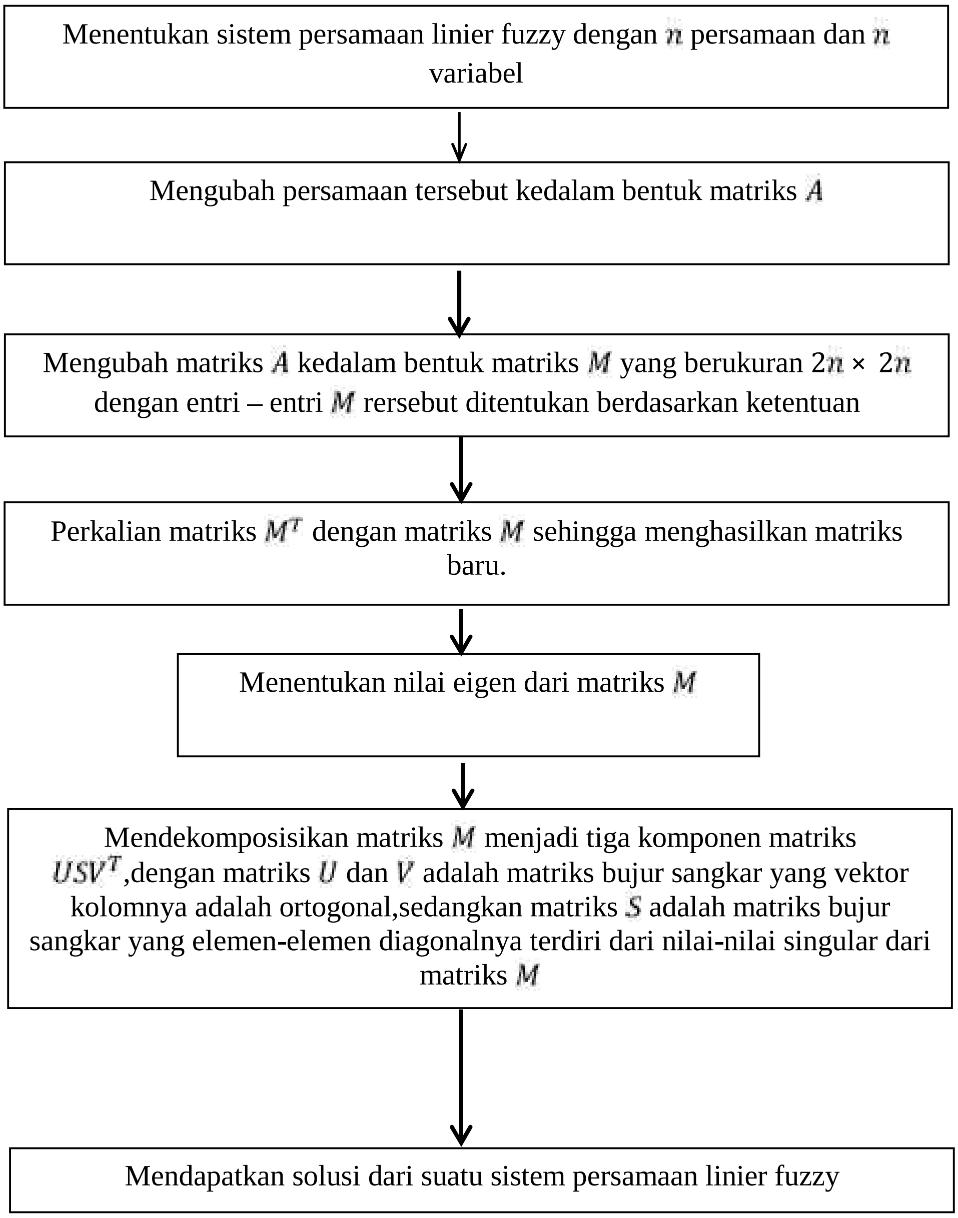
BAB III
METODOLOGI PENELITIAN

Adapun metode penelitian yang penulis gunakan adalah metode studi literatur dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan sistem persamaan linier fuzzy dengan n persamaan dan n variabel.
2. Mengubah persamaan tersebut kedalam bentuk matriks A
3. Mengubah matriks A kedalam bentuk matriks M yang berukuran $2n \times 2n$ dengan entri – entri M rersebut ditentukan berdasarkan ketentuan berikut:
   1) Jika $a_{i,j} \geq 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$
   2) Jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$
   3) Entri yang lainnya = 0
4. Mengalikan matriks M^T dengan matriks M sehingga menghasilkan matriks M baru.
5. Menentukan nilai eigen dari matriks M.
6. Mendekomposisikan matriks M menjadi tiga komponen matriks USV^T,dengan matriks U dan V adalah matriks bujur sangkar yang vektor kolomnya adalah ortogonal,sedangkan matriks S adalah matriks bujur sangkar yang elemen-elemen diagonalnya terdiri dari nilai-nilai singular dari matriks M.
7. Mendapatkan solusi dari suatu sistem persamaan linier fuzzy

Untuk lebih jelas, langkah-langkah ini disampaikan dalam bentuk *flow chart* berikut:

3.1. Flow Chart



Gambar 3.1. Flow Chart Langkah-Langkah Penyelesaian Sistem Persaman Linear *Fuzzy* Menggunakan Metode SVD

BAB IV
PEMBAHASAN DAN HASIL

Pada bab ini akan di jeleskan cara penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode SVD yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya.

4.1 Sistem Persamaan Linier *Fuzzy*

Sistem persamaan linier *fuzzy* adalah sistem persamaan linier yang berparameter *fuzzy* yang berada pada interval tertentu. Bentuk umum dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah sebagai berikut:

$$A\tilde{X} = \tilde{Y} \tag{4.1}$$

Sistem persamaan linier *fuzzy* dapat dijelasan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}\tilde{x}_1 & + & a_{12}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{1n}\tilde{x}_n & = & \tilde{y}_1 \\ a_{21}\tilde{x}_1 & + & a_{21}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{2n}\tilde{x}_n & = & \tilde{y}_2 \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\tilde{x}_1 & + & a_{m2}\tilde{x}_2 & + & \cdots & + & a_{mn}\tilde{x}_n & = & \tilde{y}_n \end{array}$$

Dengan a_{ij} adalah konstanta dan $\tilde{x}_j$ variabel yang belum diketahui dan $\tilde{y}_i$ adalah *fuzzy*. Persamaan (4.1) dapat ditulis dalam bentuk persamaan matriks sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \tilde{X} = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \\ \vdots \\ \tilde{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) \\ (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) \\ (\underline{x}_3(r), \overline{x}_3(r)) \\ \vdots \\ (\underline{x}_n(r), \overline{x}_n(r)) \end{bmatrix} \quad \text{dan}$$

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\underline{y}_1(r), \overline{y}_1(r)) \\ (\underline{y}_2(r), \overline{y}_2(r)) \\ (\underline{y}_3(r), \overline{y}_3(r)) \\ \vdots \\ (\underline{y}_n(r), \overline{y}_n(r)) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

dengan matriks koefesien $A = (a_{ij})$, untuk $i, j = 1,2, \dots, n$, $\tilde{x}$ adalah vektor bilangan *fuzzy* berukuran $n \times 1$ dengan $\tilde{x}_i = (\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r))$, $r = [0,1]$ dan

$\tilde{y}_i = \left(\underline{y}_i(r), \overline{y}_i(r)\right)$ untuk $i = 1,2,3,\ldots,n$ adalah vektor bilangan *fuzzy* yang berukuran $n \times 1$.

Langkah awal yang dilakukan untuk mencari solusi dari sistem persaan linier *fuzzy* adalah mengubah matriks koefisien A yang berukuran $n \times n$ menjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$ yang diasumsikan menjadi matriks M .

Untuk mengubah matriks A menjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$ dengan ketentuan berikut:

a) Jika $a_{i,j} \geq 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$

b) Jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$ (4.3)

c) Entri yang lainnya = 0

Definisi 4.1 (T. Allahviranloo, 2008) Vektor bilangan *fuzzy* $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ dengan diberikan $\tilde{x}_i = \left(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)\right)$ untuk $i = 1,2,\ldots,n$ dan $r = [0,1]$ disebut penyelesaian dari sistem persamaan linier fuzzy jika:

$$\underline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}x_j} = \underline{y}_i$$

$$\overline{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j} = \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}x_j} = \overline{y}_i$$

Menurut M. Matinfar (2008) sistem persamaan linier *fuzzy* baru dapat dijelaskan sebagai berikut:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
S_{11}\underline{x}_1 & + \cdots + & S_{1n}\underline{x}_n & + & S_{1,n+1}\overline{x}_2 & + \cdots + & S_{1,2n}\overline{x}_n & = & \underline{y}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
S_{n1}\underline{x}_1 & + \cdots + & S_{nn}\underline{x}_n & + & S_{n,n+1}\overline{x}_2 & + \cdots + & S_{n,2n}\overline{x}_n & = & \underline{y}_n \\
S_{n+1,1}\underline{x}_1 & + \cdots + & S_{n+1,n}\underline{x}_n & + & S_{n+1,n+1}\overline{x}_2 & + \cdots + & S_{n+1,2n}\overline{x}_n & = & \overline{y}_1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
S_{2n,1} & + \cdots + & S_{2n,n} & + & S_{2n,n+1}\overline{x}_2 & + \cdots + & S_{2n,2n}\overline{x}_n & = & \overline{y}_n
\end{array} \quad (4.4)$$

Persamaan (4.2) dapat ditulis sebagai berikut:

$$S\tilde{X} = \tilde{Y}$$

atau:

$$\begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{X} \\ \overline{X} \end{pmatrix}$$

dengan :

$S = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_2 & B_1 \end{pmatrix}$, $\underline{X} = \begin{pmatrix} \underline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{x}_n(r) \end{pmatrix}$ $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{x}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{x}_n(r) \end{pmatrix}$ $\underline{Y} = \begin{pmatrix} \underline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \underline{y}_n(r) \end{pmatrix}$ dan

$\overline{Y} = \begin{pmatrix} \overline{y}_1(r) \\ \vdots \\ \overline{y}_n(r) \end{pmatrix}$

Definisi 4.2 (M. Matinfar dkk, 2008) terdapat $X = \{(\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r)), 1 \leq i \leq n\}$ adalah solusi dari $SX = Y$ dengan bilangan *fuzzy* $U = \{(\underline{u}_i(r), \overline{u}_i(r)), 1 \leq i \leq n\}$ adalah:

$\underline{u}(r) = \min\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \overline{x}_i(1)\}$

$\overline{u}(r) = \text{maks}\{\underline{x}_i(r), \overline{x}_i(r), \underline{x}_i(1), \overline{x}_i(1)\}$

Solusi *fuzzy* $\widetilde{U}$ disebut solusi *fuzzy* kuatt (*strong fuzzy solution*) jika $\underline{u}_i = \underline{x}_i, \overline{u}_i = \overline{x}_i$, maka jika terdapat salah satu yang tidak sama maka $\widetilde{U}$ adalah solusi *fuzzy* lemah (*weak fuzzy solution*).

Berikut akan diberikan contoh mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* ke bentuk matriks koefisien A yang berukuran $n \times n$, kemudian matriks A akan diubah menjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$ sehingga didapatkan persamaan linier *fuzzy* yang baru.

Contoh 4.1:

Diberikan sistem persamaan linear *fuzzy*

$$x_1 - x_2 = v_1$$

$$x_1 + x_2 = v_2$$

Ubahlah sistem persamaan linier diatas kebentuk persamaan *fuzzy* yang baru!

Penyelesaian :

Berdasarkan persamaan diatas diperoleh matriks A, yaitu :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

Matriks A dapat diubah menjadi matriks M berdasarkan persamaan (4.3). Dengan $b_{i,j} = m_{i,j}$, sehingga diperoleh persamaan yang baru sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
M_{11}\underline{x}_1 + 0M_{12}\underline{x}_2 + 0M_{13}\bar{x}_1 + M_{14}\bar{x}_2 &= \underline{v}_1 \\
M_{21}\underline{x}_1 + M_{22}\underline{x}_2 + 0M_{13}\bar{x}_1 + 0M_{14}\bar{x}_2 &= \underline{v}_2 \\
0M_{31}\underline{x}_1 + M_{32}\underline{x}_2 + M_{33}\bar{x}_1 + 0M_{34}\bar{x}_2 &= \bar{v}_1 \\
0M_{41}\underline{x}_1 + 0M_{42}\underline{x}_2 + M_{43}\bar{x}_1 + M_{44}\bar{x}_2 &= \bar{v}_2
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks baru sebagai berikut:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{v}_1 \\ \underline{v}_2 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix}$$

Maka dengan melakukan operasi perkalian terhadap persamaan matriks diperoleh persamaan linier *fuzzy* baru yaitu:

$$\begin{aligned}
\underline{x}_1 + \phantom{\underline{x}_2 + \bar{x}_1 +{}} \bar{x}_2 &= \underline{v}_1 \\
\underline{x}_1 + \underline{x}_2 \phantom{{}+ \bar{x}_1 + \bar{x}_2} &= \underline{v}_2 \\
\underline{x}_2 + \bar{x}_1 &= \bar{v}_1 \\
\bar{x}_1 + \bar{x}_2 &= \bar{v}_2
\end{aligned}$$

4.2 Penyelesaian Sistem Persamaan Linier *Fuzzy* Menggunakan Metode SVD

Metode SVD adalah metode yang mendekomposisikan matriks A menjadi tiga matriks yaitu matriks U, S dan V. Berikut ini akan dijelaskan penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode SVD.

Langkah- langkah yang dilakukan dalam menyelesaiakan sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode SVD adalah sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linier *fuzzy* kebentuk matriks yang berkoefisien A yang berukuran $n \times n$ kedalam bentuk persamaan (4.1).

   Selanjutnya mengubah matriks A mnjadi matriks yang berukuran $2n \times 2n$ berdasarkan ketentuan (4.3).

2. Selanjutnya transposkan matriks M, kemudian mengoperasikan $M^T M$ sehingga kita dapatkan lagi matriks M yang baru .
3. Dengan menggunakan metode SVD untuk menyelesaikan matriks M, maka akan didapatkan matriks U, V dan S. Dengan matriks U dan V adalah matriks yang masing-masing vektor dari matriks tersebut adalah otonormal. Berikut akan diberikan teorema SVD:

   Teorema 4.1:

   $$M_{n\times n} = U_{n\times n} S_{n\times n} V^T{}_{n\times n}$$

   Dengan,

   $$U^T U = I_{n\times n}$$
   $$V^T V = I_{n\times n}$$
4. Pada penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* akan didapatkan bahwa $B \neq \text{proy}\langle B, U\ M\rangle$, maka sistem persamaan linier *fuzzy* tidak konsisten, dalam hal ini yang diperoleh adalah solusi pendekatan terbaik. Solusi pendekatan terbaik tersebut adalah vektor X_r sehingga,

   $$AX_r = B_r$$

   dengan B_r di dalam $U\ M$, dan B_r adalah vektor yang terdekat dengan B. Solusi pendekatan terbaik diberikan oleh persamaan (4.5), yaitu:

   $$X_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i\rangle}{\|u_i\|^2} \frac{v_i}{\sigma_i} \qquad (4.5)$$

   X_r disebut sebagai solusi pendekatan terbaik, artinya jika $MX_r = B_r$, maka B_r adalah vektor di $U\ M$ yang terdekat dengan B.

Selanjutnya, akan diberikan contoh penyelesaian sistem persamaan linear *fuzzy* dengan menggunakan metode SVD.

Contoh 4.2

Diberikan sistem persamaan *fuzzy* sebagai berikut:

$$\tilde{X}_1 - \tilde{X}_2 = -7 + 2r, -3 - 2r$$
$$\tilde{x}_1 + 3\tilde{x}_2 = (19 + 4r, 27 - 4r)$$

Tentukanlah solusi dari persamaan berikut dengan menggunakan metode SVD!

Penyelesaian:

Sistem persamaan diatas dapat dibentuk kedalam persamaan (4.1)

$$A\tilde{X} = \tilde{Y}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 + 2r, -3 - 2r \\ 19 + 4r, 27 - 4r \end{bmatrix}$$

sehingga:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r), \bar{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r), \bar{x}_2(r) \end{bmatrix}, \text{ dan } \tilde{Y} = \begin{bmatrix} -7 + 2r, -3 - 2r \\ 19 + 4r, 27 - 4r \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan ini mempunyai parameter *fuzzy*, karena itu matriks yang mempunyai koefisien A yang berukuran $n \times n$ diubah menjadi matriks koefisien baru yang berukuran $2n \times 2n$ yang di asumsikan dengan matriks M. Entri-entri pada matriks M dapat ditentukan berdasarkan rumus (4.3) sebagai berikut:

1. $a_{i,j} \geq 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$

   Nilai b untuk $i = 1, 2$, $j = 1,2$ dengan $n = 2$ adalah sebagai berikut:

   Sehingga:

   $a_{11} = 1, b_{11} = 1$ dan $b_{33} = 1$

   $a_{21} = 1, b_{21} = 1$ dan $b_{43} = 1$

   $a_{22} = 3, b_{22} = 3$ dan $b_{44} = 3$

2. Jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$

   Sehingga:

   $a_{12} = -1, b_{14} = 1$ dan $b_{32} = 1$

3. b_{ij} bernilai nol untuk entri-entri yang lainnya.

Karena pada contoh ini matriks baru diasumsikan sebagai matriks M, sehingga $b_{i,j} = m_{i,j}$. Berdasarkan entri-entri yang didapat maka akan diperoleh persamaan baru sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
M_{11}\underline{x}_1 + 0M_{12}\underline{x}_2 + 0M_{13}\bar{x}_1 + M_{14}\bar{x}_2 &= \underline{y}_1 \\
M_{21}\underline{x}_1 + 3M_{22}\underline{x}_2 + 0M_{13}\bar{x}_1 + 0M_{14}\bar{x}_2 &= \underline{y}_2 \\
0M_{31}\underline{x}_1 + M_{32}\underline{x}_2 + M_{33}\bar{x}_1 + 0M_{34}\bar{x}_2 &= \bar{y}_1 \\
0M_{41}\underline{x}_1 + 0M_{42}\underline{x}_2 + M_{43}\bar{x}_1 + 3M_{44}\bar{x}_2 &= \bar{y}_2
\end{aligned}$$

Persamaan di atas dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks baru sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7+2r \\ 19+4r \\ -3-2r \\ 27-4r \end{bmatrix}$$

Dengan,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{X} = \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix}, \tilde{Y} = \begin{bmatrix} -7+2r \\ 19+4r \\ -3-2r \\ 27-4r \end{bmatrix}$$

Maka dengan melakukan operasi perkalian terhadap persamaan matriks diperoleh persamaan linier *fuzzy* baru yaitu:

$$\begin{aligned} \underline{x}_1 + \overline{x}_2 &= -7+2r \\ \underline{x}_1 + 3\underline{x}_2 &= 19+4r \\ \underline{x}_2 + \overline{x}_1 &= -3-2r \\ \overline{x}_1 + 3\overline{x}_2 &= 27-4r \end{aligned}$$

Penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* yang baru ini dapat dilakukan dengan metose SVD, yakni mendekomposisikan matriks M kedalam tiga komponen matriks dengan cara sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linear *fuzzy* ke dalam bentuk persamaan matriks $MX = Y$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7+2r \\ 19+4r \\ -3-2r \\ 27-4r \end{bmatrix}$$

2. Mencari nilai eigen dan vektor eigen
   a. Mengubah matriks M menjadi matriks $M^T M$

$$M^T M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

b. Mencari nilai-nilai eigen

$$\lambda I - M = \lambda - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & 10 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda - 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & \lambda - 10 \end{pmatrix},$$

Sehingga,

$$det\ \lambda I - M = det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & \lambda - 10 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & \lambda - 10 \end{pmatrix}$$

$$= \lambda^4 - 24\lambda^3 - 96\lambda^2 + 400\lambda + 400.$$

Persamaan karakteristik dari M adalah

$\lambda^4 - 24\lambda^3 - 96\lambda^2 + 400\lambda + 400.$

Sehingga, didapat nilai-nilai eigen dari M adalah

$\lambda_1 = 1.5279$, $\lambda_2 = 0.3431$, $\lambda_3 = 10.4721$ dan $\lambda_4 = 11.6569$

c. Mencari vektor-vektor eigen

1) Untuk $\lambda_1 = 1.5279$

   Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 1.5279$, yaitu:

   $x_1 = \begin{pmatrix} 4.2358 & -0.9999 & -4.2365 & 1 \end{pmatrix}^T.$

2) Untuk $\lambda_2 = 0.3431$

   Vektor eigen $\lambda_2 = 0.3431$, yaitu:

   $x_2 = \begin{pmatrix} -2.4139 & 0.9999 & -2.4141 & 1 \end{pmatrix}^T.$

3) Untuk $\lambda_3 = 10.4721$

   Vektor eigen $\lambda_3 = 10.4721$, yaitu:

   $x_3 = \begin{pmatrix} -0.2360 & -0.9998 & 0.2361 & 1 \end{pmatrix}^T.$

4) Untuk $\lambda_4 = 11.6569$

   Vektor eigen $\lambda_4 = 11.6569$, yaitu:

$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.4143 & 1.0001 & 0.4142 & 1 \end{bmatrix}^T$

3. Mendekomposisikan matriks M menjadi tiga komponen yaitu matriks U, S dan V

   a. Menyusun matriks S

   Nilai singular dari matriks M adalah:

   $\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{1.5279} = 1.2361$

   $\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{0.3431} = 0.5857$

   $\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{10.4721} = 3.2361$

   $\sigma_4 = \sqrt{\lambda_4} = \sqrt{11.6569} = 3.4142$

   matriks singular yang terbentuk adalah:

   $$S = \begin{bmatrix} 1.2361 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2361 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.4142 \end{bmatrix}$$

   b. Menyusun matriks V

   $v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$

   Maka,

   $$v_1 = \frac{1}{\sqrt{|4.2358|^2 + |-0.9999|^2 + |4.2354|^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 4.2358 \\ -0.9999 \\ -4.2365 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} 0.6881 \\ -0.1624 \\ -0.6882 \\ 0.1625 \end{bmatrix}.$$

   $$v_2 = \frac{1}{\sqrt{|-2.4139|^2 + |0.9999|^2 + |-2.4141|^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} -2.4139 \\ 0.9999 \\ -2.4141 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   $$= \begin{bmatrix} -0.6533 \\ 0.2706 \\ -0.6533 \\ 0.2706 \end{bmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{|-0.2305|^2 + |-0.9998|^2 + |0.2361|^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} -0.2305 \\ -0.9998 \\ 0.2361 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.1624 \\ -0.6881 \\ 0.1625 \\ 0.6883 \end{bmatrix}.$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{|0.4143|^2 + |1.0001|^2 + |0.4142|^2 + 1^2}} \begin{bmatrix} 0.4143 \\ 1.0001 \\ 0.4142 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.6533 \\ 0.2706 \\ 0.6533 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$V = \begin{bmatrix} 0.6881 & -0.6533 & -0.1624 & 0.2706 \\ -0.1624 & 0.2706 & -0.6881 & 0.6533 \\ -0.6882 & -0.6533 & 0.1625 & 0.2706 \\ 0.1625 & 0.2706 & 0.6883 & 0.6533 \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa matriks V adalah ortonormal:

a) Bahwa matriks V yang terdiri dari vektor kolom v_1, v_2, v_3 dan v_4 adalah ortogonal.

Terbukti dengan,

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0, \langle v_1, v_3 \rangle = 0, \langle v_1, v_4 \rangle = 0, \langle v_2, v_3 \rangle = 0, \langle v_2, v_4 \rangle = 0$

$\langle v_3, v_4 \rangle = 0$

b) Bahwa norom dari vektor kolom matriks V adalah satu.

Terbukti dengan,

$\|v_1\| = \sqrt{(0.6881)^2 + (-0.1624)^2 + (-0.6882)^2 + (0.1625)^2}$

$= 1$

$\|v_2\| = \sqrt{(-0.6533)^2 + (0.2706)^2 + (-0.6533)^2 + (0.2706)^2}$

$= 1$

$\|v_3\| = \sqrt{(-0.1624)^2 + (-0.6881)^2 + (0.1625)^2 + (0.6883)^2}$

$= 1$

$$\|v_4\| = \sqrt{(0.2706)^2 + (0.6533)^2 + (0.2706)^2 + (0.6533)^2}$$

$= 1$

c. Menyusun matriks U

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} M v_i \,,$$

Maka,

$$u_1 = \frac{1}{1.2361} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6881 \\ -0.1624 \\ -0.6882 \\ 0.1625 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.6881 \\ 0.1625 \\ -0.6881 \\ -0.1624 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{0.5857} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.6533 \\ 0.2706 \\ -0.6533 \\ 0.2706 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -0.6534 \\ 0.2706 \\ -0.6534 \\ 0.2706 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{3.2361} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0.1624 \\ -0.6881 \\ 0.1625 \\ 0.6883 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.1625 \\ -0.6881 \\ -0.1627 \\ 0.6883 \end{bmatrix}$$

$$u_4 = \frac{1}{3.4142} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.6533 \\ 0.2706 \\ 0.6533 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.6533 \\ 0.2706 \\ 0.6533 \end{bmatrix}$$

Sehingga didapatkan matriks U sebagai berikut:

$$U = \begin{bmatrix} 0.6881 & -0.6533 & 0.1624 & 0.2706 \\ 0.1625 & 0.2706 & -0.6881 & 0.6533 \\ -0.6882 & -0.6533 & -0.1625 & 0.2706 \\ -0.1624 & 0.2706 & 0.6883 & 0.6533 \end{bmatrix}$$

Sehingga SVD dari matriks M adalah:

$M = USV^T$

$$= \begin{bmatrix} 0.6881 & -0.6533 & 0.1624 & 0.2706 \\ 0.1625 & 0.2706 & -0.6881 & 0.6533 \\ -0.6882 & -0.6533 & -0.1625 & 0.2706 \\ -0.1624 & 0.2706 & 0.6883 & 0.6533 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1.2361 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5857 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3.2361 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.4142 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.6881 & -0.1624 & 0.6882 & 0.1625 \\ -0.6533 & 0.2706 & -0.6533 & 0.2706 \\ -0.1624 & -0.6881 & 0.1625 & 0.6883 \\ 0.2706 & 0.6533 & 0.2706 & 0.6533 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.9999 & 0 & 0 & 1.0001 \\ 0.9999 & 2.9997 & 0 & 0 \\ 0 & 1.0004 & 0.9997 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0001 & 3.0001 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*

$$\text{proy}\langle B, U\ M\rangle = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B,\ u_i\rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

$$= \frac{\langle B,\ u_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle B,\ u_2\rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle B,\ u_3\rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle B,\ u_4\rangle}{\|u_4\|^2} u_4$$

$$= \langle B,\ u_1\rangle u_1 + \langle B,\ u_2\rangle u_2 + \langle B,\ u_3\rangle u_3 + \langle B,\ u_4\rangle u_4$$

$$= -4.0497 + 4.0519r \begin{bmatrix} 0.6881 \\ 0.1625 \\ -0.6881 \\ -0.1624 \end{bmatrix}$$

$$+\ 18.9816 \begin{bmatrix} -0.6534 \\ 0.2706 \\ -0.6534 \\ 0.2706 \end{bmatrix}$$

$$+ \; 4.8608 - 4.8552r \begin{bmatrix} 0.1625 \\ -0.6881 \\ -0.1627 \\ 0.6883 \end{bmatrix}$$

$$+ \; 27.3458 \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.6533 \\ 0.2706 \\ 0.6533 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -7.003 + 2.0001r \\ 18.9948 + 3.9996r \\ -3.0003 - 2.0002r \\ 27.0042 - 4.0006r \end{bmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh:

$proy\,(B, U\ M \neq B$, atau

$-7.003 + 2.0001r, 18.9948 + 3.9996r, -3.0003 - 2.0002r, 27.0042 - 4.0006r \neq (-7 + 2r, 19 + 4r, -3 - 2r, 27 - 4r)$.

Karena $proy\,(B, U\ M \neq B$ maka sistem persamaan linier ini tidak konsisten, akan tetapi solusi pendekatan terbaik dari sistem persamaan linier *fuzzy* ini dapat dicari, yaitu:

$$X_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} \frac{v_i}{\sigma_i}$$

$$= \frac{\langle B, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{\langle B, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \frac{v_2}{\sigma_2} + \frac{\langle B, u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} \frac{v_3}{\sigma_3} + \frac{\langle B, u_4 \rangle}{\|u_4\|^2} \frac{v_4}{\sigma_4}$$

$$= \frac{\langle B, u_1 \rangle}{\sigma_1} v_1 + \frac{\langle B, u_2 \rangle}{\sigma_2} v_2 + \frac{\langle B, u_3 \rangle}{\sigma_3} v_3 + \frac{\langle B, u_4 \rangle}{\sigma_4} v_4$$

$$= \frac{-4.0497 + 4.0519r}{1.2361} \begin{bmatrix} 0.6881 \\ -0.1624 \\ -0.6882 \\ 0.1625 \end{bmatrix} + \frac{18.9816}{0.5057} \begin{bmatrix} -0.6533 \\ 0.2706 \\ -0.6533 \\ 0.2706 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{4.8608 - 4.8552r}{3.2361} \begin{bmatrix} -0.1624 \\ -0.6881 \\ 0.1625 \\ 0.6883 \end{bmatrix} + \frac{27.3458}{3.4142} \begin{bmatrix} 0.2706 \\ 0.6533 \\ 0.2706 \\ 0.6533 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{matrix} -2.2544 + 2.2557r \\ 0.5321 - 0.5324r \\ 2.2547 - 2.2559r \\ -0.5324 + 0.5327r \end{matrix} + \begin{matrix} -21.1707 \\ 8.7690 \\ -21.1707 \\ 8.7690 \end{matrix} + \begin{matrix} -0.2439 + 0.2437r \\ -1.0336 + 1.0324r \\ 0.2441 - 0.2438r \\ 1.0339 - 1.0327r \end{matrix}$$

$$+ \begin{matrix} 2.1673 \\ 5.2325 \\ 2.1673 \\ 5.2325 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} -21.5017 + 2.4993r \\ 13.5000 + 0.5000r \\ -16.5046 - 2.4998r \\ 14.5030 - 0.4999r \end{matrix}$$

$\underline{x}_1 = -21.5017 + 2.4993r$

$\underline{x}_2 = 13.5000 - 2.4997r$

$\overline{x}_1 = -16.5045 - 2.4997r$

$\overline{x}_2 = 14.5030 - 0.4999r$

Jadi penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* diperoleh sebagai berikut:

$\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) = (-21.5017 + 2.4993r, -16.5045 - 2.4997r)$

$\tilde{x}_2 = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) = (13.5000 + 0.5000r, 14.5030 - 0.4999r)$

Berdasarkan definisi 4.2 solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah :

$\underline{u}_1(r) = \min\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_r(1)\}$

$= \min\{-21.50 + 2.49r, -16.50 - 2.49(r), -19.00, -19.00\}$

$= -21.5017 + 2.4993r$

$\underline{u}_1(r) = \underline{x}_1(r)$

$\overline{u}_1(r) = \text{maks}\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\}$

$= \text{maks}\{-21.50 + 2.49r, -16.50 - 2.49(r), -19.00, -19.00\}$

$= -16.5045 - 2.4997$

$\overline{u}_1(r) = \overline{x}_1(r)$

$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_2(1)\}$

$= \min\{13.5000 + 0.5000r, 14.5030 - 0.4999r, 14.000, 14.000\}$

$= 13.5000 - 0.5000$

$\underline{u}_2(r) = \underline{x}_2(r)$

$\overline{u}_2(r) = \text{maks}\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_2(r)\}$

$\quad = \{13.5000 - 0.5000r, 14.5030 - 0.4999r, 14.000, 14.000\}$

$\quad = 14.5030 - 0.4999r$

$\overline{u}_2(r) = \overline{x}_2(r)$

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linier *fuzzy* maka diperoleh

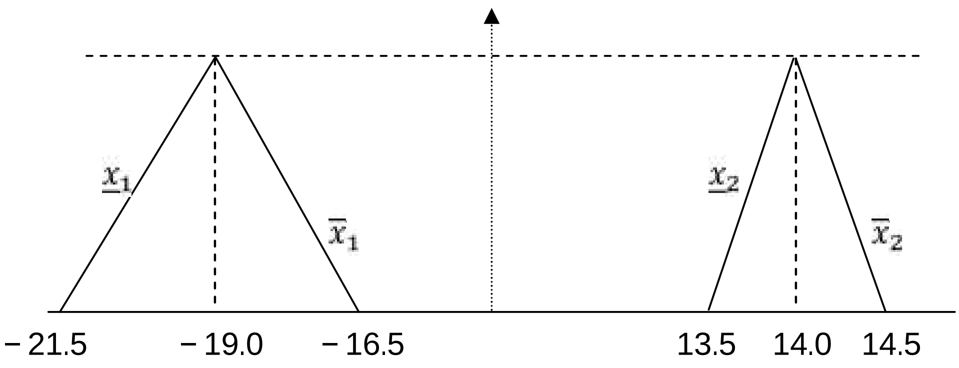
$\tilde{u}_1 = (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) = (-21.5017 + 2.4993r, -16.5045 - 2.4997)$

$\tilde{u}_2 = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) = (13.5000 + 0.5000r, 14.5030 - 0.4999r)$

Maka diperoleh bahwa $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$, dengan demikian penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* ini adalah kuat. Berdasarkan persamaan (2.1) maka sistem persamaan linier *fuzzy* ini dapat dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut:

$\tilde{x}_1 = (-21.50, -19.00, -16.50)$, $\tilde{x}_2 = (13.50, 14.00, 14.50)$

Grafik untuk sistem persamaan linier *fuzzy* ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4. 1 Grafik Funfsi Keanggotaan Segitiga dari $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$

Berdasarkan hasil dari penyelesaian diperoleh bahwa solusi sistem persamaan linier *fuzzy* ini kuat karena $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$. Serta solusi pendekatan terbaik dari sistem persamaan linear *fuzzy* ini adalah

$\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) = (-21.5017 + 2.4993r, -16.5045 - 2.4997r)$ dan

$\tilde{x}_2 = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) = (13.5000 + 0.5000r, 14.5030 - 0.4999r)$

Contoh 4.3

Diberikan sistem persamaan *fuzzy* sebagai berikut:

$$6\tilde{X}_1 - 5\tilde{X}_2 = 18 + 6r, 26 - 2r$$
$$-5\tilde{x}_1 + 6\tilde{x}_2 = (12 + 3r, 11 + 4r)$$

Tentukanlah solusi dari persamaan berikut dengan menggunakan metode SVD!

Penyelesaian:

Sistem persamaan diatas dapat dibentuk kedalam persamaan (4.1)

$$A\tilde{X} = \tilde{Y}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 + 6r, 26 - 2r \\ 12 + 3r, 11 + 4r \end{bmatrix}$$

sehingga:

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}, \tilde{X} \begin{bmatrix} \underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r) \\ \underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r) \end{bmatrix}, \text{ dan } \tilde{Y} = \begin{bmatrix} 18 + 6r, 26 - 2r \\ 12 + 3r, 11 + 4r \end{bmatrix}$$

Sistem persamaan ini mempunyai parameter *fuzzy*, karena itu matriks yang mempunyai koefisien A yang berukuran $n \times n$ diubah menjadi matriks koefisien baru yang berukuran $2n \times 2n$ yang di asumsikan dengan matriks B. Entri-entri pada matriks B dapat ditentukan berdasarkan rumus (4.3) sebagai berikut:

1. $a_{i,j} \geq 0$ maka $b_{i,j} = a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j+n} = a_{ij}$

   Nilai b untuk $i = 1, 2$, $j = 1,2$ dengan $n = 2$ adalah sebagai berikut:

   $a_{11} = 6, b_{11} = 6$ dan $b_{33} = 6$

   $a_{22} = 6, b_{22} = 6$ dan $b_{44} = 6$

2. Jika $a_{i,j} < 0$ maka $b_{i,j+n} = -a_{i,j}$ dan $b_{i+n,j} = -a_{ij}$

   $a_{12} = -5, b_{14} = 5$ dan $b_{32} = 5$

   $a_{21} = -5, b_{23} = 5$ dan $b_{41} = 5$

3. b_{ij} bernilai nol untuk entri-entri yang lainnya.

Karena pada contoh ini matriks baru diasumsikan sebagai matriks M, sehingga $b_{i,j} = m_{i,j}$. Berdasarkan entri-entri yang didapat maka akan diperoleh persamaan baru sebagai berikut:

$$6M_{11}\underline{x}_1 + 0M_{12}\underline{x}_2 + 0M_{13}\bar{x}_1 + 5M_{14}\bar{x}_2 = \underline{y}_1$$
$$0M_{21}\underline{x}_1 + 6M_{22}\underline{x}_2 + 5M_{13}\bar{x}_1 + 0M_{14}\bar{x}_2 = \underline{y}_2$$

$$0M_{31}\underline{x}_1 + 5M_{32}\underline{x}_2 + 6\,M_{33}\overline{x}_1 + 0M_{34}\overline{x}_2 = \overline{y}_1$$

$$5M_{41}\underline{x}_1 + 0M_{42}\underline{x}_2 + 0M_{43}\overline{x}_1 + 6M_{44}\overline{x}_2 = \overline{y}_2$$

Matriks M dapat diubah menjadi bentuk persamaan matriks baru sebagai berikut:

$$\begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 18 + 6r \\ 12 + 3r \\ 26 - 2r \\ 11 + 4r \end{matrix}$$

dengan:

$$\tilde{B} = \begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{matrix}, \tilde{X} = \begin{matrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{matrix}, \tilde{Y} = \begin{matrix} 18 + 6r \\ 12 + 3r \\ 26 - 2r \\ 11 + 4r \end{matrix}$$

Maka dengan melakukan operasi perkalian terhadap persamaan matriks diperoleh persamaan linier *fuzzy* baru yaitu:

$$6\,\underline{x}_1 + 5\,\overline{x}_2 = 18 + 6r$$

$$6\,\underline{x}_1 + 5\underline{x}_2 = 12 + 3r$$

$$5\,\underline{x}_2 + 6\,\overline{x}_1 = 26 - 2r$$

$$5\,\overline{x}_1 + 6\overline{x}_2 = 11 + 4r$$

Penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* yang baru ini dapat dilakukan dengan metose SVD, yakni mendekomposisikan matriks M kedalam tiga komponen matriks dengan cara sebagai berikut:

1. Mengubah sistem persamaan linear kompleks ke dalam bentuk persamaan matriks $MX = Y$

$$\begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} \underline{x}_1 \\ \underline{x}_2 \\ \overline{x}_1 \\ \overline{x}_2 \end{matrix} = \begin{matrix} 18 + 6r \\ 12 + 3r \\ 26 - 2r \\ 11 + 4r \end{matrix}$$

2. Mencari nilai eigen dan vektor eigen
   a. Mengubah matriks M menjadi matriks $M^T M$

$$M^T M = \begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} 61 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 61 & 60 & 0 \\ 0 & 60 & 61 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 61 \end{matrix}$$

b. Mencari nilai-nilai eigen

$\lambda I - M$

$$= \begin{matrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \lambda \end{matrix} - \begin{matrix} 61 & 0 & 0 & 60 \\ 0 & 61 & 60 & 0 \\ 0 & 60 & 61 & 0 \\ 60 & 0 & 0 & 61 \end{matrix}$$

$$= \begin{matrix} \lambda - 61 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & \lambda - 61 & -60 & 0 \\ 0 & -60 & \lambda - 61 & 0 \\ -60 & 0 & 0 & \lambda - 61 \end{matrix},$$

Sehingga,

$det\ \lambda I - M$

$$= det \begin{matrix} \lambda - 61 & 0 & 0 & -60 \\ 0 & \lambda - 61 & -60 & 0 \\ 0 & -60 & \lambda - 61 & 0 \\ -60 & 0 & 0 & \lambda - 61 \end{matrix}$$

$= \lambda^4 - 244\lambda^3 + 2326\lambda^2 - 907924\lambda + 13845841.$

Persamaan karakteristik dari M adalah

$\lambda^4 - 24\lambda^3 - 96\lambda^2 + 400\lambda + 400.$

Sehingga, didapat nilai-nilai eigen dari M adalah

$\lambda_1 = 121$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 121$ dan $\lambda_4 = 1$

c. Mencari vektor-vektor eigen

1) Untuk $\lambda_1 = 121$

   Vektor eigen untuk $\lambda_1 = 121$, yaitu:

   $x_1 = \begin{matrix} 0 & -0.7071 & 0.7071 & 0 \end{matrix}^T.$

2) Untuk $\lambda_2 = 1$

   Vektor eigen $\lambda_2 = 1$, yaitu:

   $x_2 = \begin{matrix} 0 & 0.7071 & 0.7071 & 0 \end{matrix}^T.$

3) Untuk $\lambda_3 = 121$

   Vektor eigen $\lambda_3 = 121$, yaitu:

   $x_3 = \begin{matrix} 0.7071 & 0 & 0 & -0.7071 \end{matrix}^T.$

4) Untuk $\lambda_4 = 1$

Vektor eigen $\lambda_4 = 1$, yaitu:

$\lambda_3 = \begin{bmatrix} 0.7071 & 0 & 0 & 0.7071 \end{bmatrix}^T$.

3. Mendekomposisikan matriks M menjadi tiga komponen matriks USV^T

a. Menyusun matriks S

Nilai singular dari matriks M adalah:

$\sigma_1 = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{121} = 11$

$\sigma_2 = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{1} = 1$

$\sigma_3 = \sqrt{\lambda_3} = \sqrt{121} = 11$

$\sigma_4 = \sqrt{\lambda_4} = \sqrt{1} = 1$

matriks singular yang terbentuk adalah:

$$S = \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b. Menyusun matriks V

$v_i = \frac{1}{\|x_i\|} x_i$

Maka

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{|0|^2 + |-0.7071|^2 + |0.7071|^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7071 \\ 0.7071 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$v_2 = \frac{1}{\sqrt{|0|^2 + |0.7071|^2 + |0.7071|^2 + 0^2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7071 \\ 0.7071 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{|0.7071|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |-0.7071|^2}} \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7071 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7072 \end{bmatrix}.$$

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{|0.7071|^2 + |0|^2 + |0|^2 + |0.7071|^2}} \begin{bmatrix} 0.7071 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7071 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7072 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7072 & 0.7072 \\ -0.7072 & 0.7072 & 0 & 0 \\ 0.7072 & 0.7072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7072 & 0.7072 \end{bmatrix}$$

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa matriks V adalah ortonormal:

a) Bahwa matriks V yang terdiri dari vektor kolom v_1, v_2, v_3 dan v_4 adalah ortogonal.

Terbukti dengan,

$\langle v_1, v_2 \rangle = 0$, $\langle v_1, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_1, v_4 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_3 \rangle = 0$, $\langle v_2, v_4 \rangle = 0$

$\langle v_3, v_4 \rangle = 0$

b) Bahwa norom dari vektor kolom matriks V adalah satu.

Terbukti dengan,

$\|v_1\| = \sqrt{(0)^2 + (-0.7072)^2 + (0.7072)^2 + (0)^2}$

$= 1$

$\|v_2\| = \sqrt{(0)^2 + (0.7072)^2 + (0.7072)^2 + (0)^2}$

$= 1$

$\|v_3\| = \sqrt{(0.7072)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (-0.7072)^2}$

$= 1$

$$\|v_4\| = \sqrt{0.7072^2 + 0^2 + 0^2 + 0.7072^2}$$

$$= 1$$

c. Menyusun matriks U

$$u_i = \frac{1}{\sigma_i} M v_i ,$$

Maka,

$$u_1 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_2 = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$u_3 = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7072 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7072 \end{bmatrix}$$

$$u_4 = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7072 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7072 \end{bmatrix}$$

Sehingga,

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7072 & 0.7072 \\ -0.7072 & 0.7072 & 0 & 0 \\ 0.7072 & 0.7072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7072 & 0.7072 \end{bmatrix}$$

Sehingga SVD dari matriks M adalah:

$M = USV^T$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.7072 & 0.7072 \\ -0.7072 & 0.7072 & 0 & 0 \\ 0.7072 & 0.7072 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.7072 & 0.7072 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -0.7072 & 0.7072 & 0 \\ 0 & 0.7072 & 0.7072 & 0 \\ 0.7072 & 0 & 0 & -0.7072 \\ 0.7072 & 0 & 0 & 0.7072 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 6.0016 & 0 & 0 & 5.0013 \\ 0 & 6.0016 & 5.0013 & 0 \\ 0 & 5.0013 & 6.0016 & 0 \\ 5.0013 & 0 & 0 & 6.0016 \end{bmatrix}$$

4. Menentukan solusi dari suatu sistem persamaan linier *fuzzy*

$$\text{proy}(B, U(M)) = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B,\ u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$$

$$= \frac{\langle B,\ u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} u_1 + \frac{\langle B,\ u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} u_2 + \frac{\langle B,\ u_3 \rangle}{\|u_3\|^2} u_3 + \frac{\langle B,\ u_4 \rangle}{\|u_4\|^2} u_4$$

$$= \langle B,\ u_1 \rangle u_1 + \langle B,\ u_2 \rangle u_2 + \langle B,\ u_3 \rangle u_3 + \langle B,\ u_4 \rangle u_4$$

$$= (9.9008 + 0.7072r) \begin{bmatrix} 0 \\ -0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (26.8736 + 0.7072r) \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7072 \\ 0.7072 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ (4.9504 + 1.4144r) \begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ -0.7072 \end{bmatrix}$$

$$+\ (20.5088+7.0720r)\begin{pmatrix}0.7072\\0\\0\\0.7072\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}18.0047+6.0014r\\12.0023+3r\\26.0068-2r\\11.0029+4.0012r\end{pmatrix}$$

Berdasarkan hasil perhitungan di atas diperoleh:

$proy\,(B, U\ M) \neq B$, atau

$(18.0047+6.0014r,\ 12.0023+3r, 26.0068-2r, 27.0042-4.0006r)$

$\neq (18+6r, 12+3r, 26-2r, 11+4r)$

Karena $proy\,(B, U\ M) \neq B$ maka sistem persamaan linier ini tidak konsisten, akan tetapi solusi pendekatan terbaik dari sistem persamaan linier *fuzzy* ini dapat dicari, yaitu:

$$X_r = \sum_{i=1}^{r} \frac{\langle B,\ u_i\rangle}{\|u_i\|^2}\ \frac{v_i}{\sigma_i}$$

$$= \frac{\langle B,\ u_1\rangle}{\|u_1\|^2}\ \frac{v_1}{\sigma_1} + \frac{\langle B,\ u_2\rangle}{\|u_2\|^2}\ \frac{v_2}{\sigma_2} + \frac{\langle B,\ u_3\rangle}{\|u_3\|^2}\ \frac{v_3}{\sigma_3} + \frac{\langle B,\ u_4\rangle}{\|u_4\|^2}\ \frac{v_4}{\sigma_4}$$

$$= \frac{\langle B,\ u_1\rangle}{\sigma_1}\ v_1 + \frac{\langle B,\ u_2\rangle}{\sigma_2}\ v_2 + \frac{\langle B,\ u_3\rangle}{\sigma_3}\ v_3 + \frac{\langle B,\ u_4\rangle}{\sigma_4}\ v_4$$

$$= (9.9008-3.5360r)\begin{pmatrix}0\\-0.7072\\0.7072\\0\end{pmatrix}$$

$$+\ (2.4431+0.0643r)\begin{pmatrix}0\\0.7072\\0.7072\\0\end{pmatrix}$$

$$+\ (4.9504+1.4144r)\begin{pmatrix}0.7072\\0\\0\\-0.7072\end{pmatrix}$$

$$+\ (1.8644 + 0.6429r)\begin{bmatrix} 0.7072 \\ 0 \\ 0 \\ 0.7072 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ -7.0018 + 2.5r \\ -7.0018 - 2.5r \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1.7278 + 0.0455r \\ 1.7278 + 0.0455r \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 3.5009 + 1.0003r \\ 0 \\ 0 \\ 3.5009 - 1.0003r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1.3185 + 0.4547r \\ 0 \\ 0 \\ 1.3185 + 0.4547r \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4.8194 + 1.455r \\ -5.274 + 2.5455r \\ 8.7296 - 2.4545r \\ -2.1824 - 0.5456r \end{bmatrix}$$

$\underline{x}_1 = 4.8194 + 1.455r$

$\underline{x}_2 = -5.274 + 2.5455r$

$\overline{x}_1 = 8.7296 - 2.4545r$

$\overline{x}_2 = -2.1824 - 0.5456r$

Jadi penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* diperoleh sebagai berikut:

$\tilde{x}_1 = (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) = (4.8194 + 1.455r, 8.7296 - 2.4545r)$

$\tilde{x}_2 = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) = (-5.274 + 2.5455r, -2.1824 - 0.5456r)$

Berdasarkan definisi 4.2 solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* adalah :

$\underline{u}_1(r) = \min\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_r(1)\}$

$\quad = \min\{4.8194 + 1.455r, 8.7296 - 2.4545r, 6.28, 6.28\}$

$\quad = 4.8194 + 1.455r$

$\underline{u}_1(r) = \underline{x}_1(r)$

$\overline{u}_1(r) = \text{maks}\{\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r), \underline{x}_1(1), \overline{x}_1(1)\}$

$\quad = \text{maks}\{4.8194 + 1.455r, 8.7296 - 2.4545r, 6.28, 6.28\}$

$\quad = 8.7296 - 2.4545r$

$\overline{u}_1(r) = \overline{x}_1(r)$

$\underline{u}_2(r) = \min\{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_2(1)\}$

$= \min\ \{-5.274 + 2.5455r, -2.1824 - 0.5456r, -2.73, -2.73\}$

$= -5.274 + 2.5455r$

$\underline{u}_2(r) = \underline{x}_2(r)$

$\overline{u}_2(r) = \text{maks}\ \{\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r), \underline{x}_2(1), \overline{x}_2(r)\}$

$= \{-5.274 + 2.5455r, -2.1824 - 0.5456r, -2.73, -2.73\}$

$= -2.1824 - 0.5456r$

$\overline{u}_2(r) = \overline{x}_2(r)$

Berdasarkan penjabaran solusi sistem persamaan linier *fuzzy* maka diperoleh

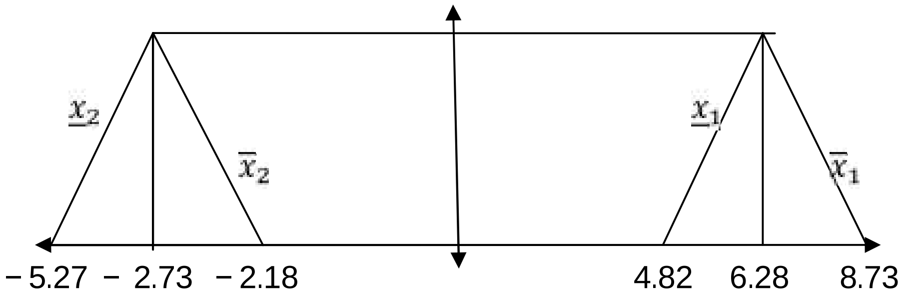
$\tilde{u}_1 = (\underline{x}_1(r), \overline{x}_1(r)) = (4.8194 + 1.455r, 8.7296 - 2.4545r)$

$\tilde{u}_2 = (\underline{x}_2(r), \overline{x}_2(r)) = (-5.274 + 2.5455r, -2.1824 - 0.5456r)$

Maka diperoleh bahwa $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$, dengan demikian penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* ini adalah kuat. Berdasarkan persamaan (2.1) maka sistem persamaan linier *fuzzy* ini dapat dinyatakan dengan bilangan *fuzzy* segitiga sebagai berikut:

$\tilde{x}_1 = (4.8194, 6.28, 8.7296)$, $\tilde{x}_2 = (-5.274, -2.73, -2.1824)$

Grafik untuk sistem persamaan linier *fuzzy* ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 4.2 Grafik Funfsi Keanggotaan Segitiga dari $\tilde{x}_1$ dan $\tilde{x}_2$

Berdasarkan hasil dari penyelesaian diperoleh bahwa solusi dari sistem persamaan linier *fuzzy* ini kuat karena $\tilde{u}_1 = \tilde{x}_1$ dan $\tilde{u}_2 = \tilde{x}_2$. Serta solusi pendekatan terbaik sistim persamaan linier *fuzzy* ini adalah :

$\tilde{u}_1 = \underline{x}_1\ r\ , \overline{x}_1\ r \ = \ 4.8194 + 1.455r, 8.7296 - 2.4545r$ dan

$\tilde{u}_2 = \underline{x}_2\ r\ , \overline{x}_2\ r \ = \ -5.274 + 2.5455r, -2.1824 - 0.5456r$.

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

5.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil penelitian ini diperoleh kesimpulan bahwa penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* $A\tilde{x} = \tilde{y}$ dapat dilakukan dengan metode *Singular Value Decomposition* (SVD) . Solusi yang diperoleh dari penyelesaian sistem persamaan linier *fuzzy* menggunakan metode SVD adalah solusi pendekatan terbaik karena $proy \langle B, \; U \; M \rangle \neq B$.

5.2 Saran

Pada tugas akhir ini penulis menggunakan metode SVD untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*, penulis menyarankan agar pembaca bisa mencoba menggunakan metode lain untuk menyelesaikan sistem persamaan linier *fuzzy*.

DAFTAR PUSTAKA

Anton, Howard. *"Elementary Linear Algebra"*, Eighth Edition. John Wiley, New York. 2000.

Ahmad, Irdam Haidir, dan Lucia Ratnasari. *"Menyelesaikan Sistem Persamaan Linear Menggunakan Analisis SVD"*. Jurnal Matematika Vol. 13;40-45. 2010.

Kalman, Dan. *"A Singularly Valuable Decomposition : The SVD of a Matrix"*. The AmericanUniversity, Washington, DC. (Diakses Tanggal 28 Februari 2012).

Leon, Steven J. *"Aljabar Linear dan Aplikasinya"*, Edisi Kelima. Erlangga, Jakarta. 2001.

Lipschutz, Seymour, dan Marc Lars Lipson. *"Aljabar Linear Schaum's"*. Edisi Ketiga. Erlangga, Jakarta. 2006.

Nicholson, W. Keith. *"Elementary Linear Algebra"*. First Edition. McGraw-Hill, Singapore. 2001.

Noranita, Beta.*"Sistem Persamaan Linear Fuzzy"*. Vol. 11;94-99.2008.

Sutojo, T. dkk. *"Teori dan Aplikasi Aljabar Linear dan Matriks"*. Andi, Yogyakarta. 2010.